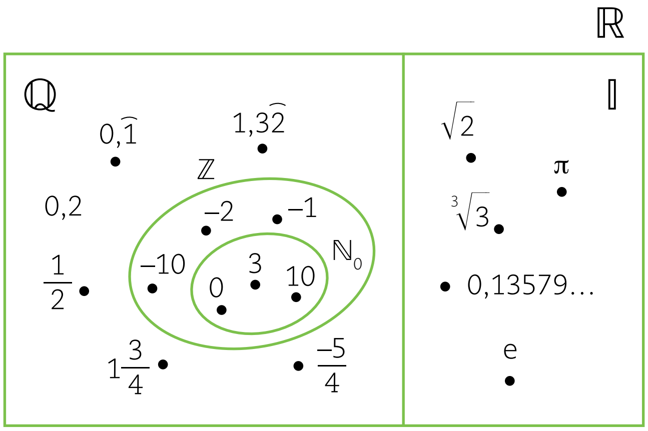
capítulo

1

# Conjunto de números reales






Conjunto de números naturales con el cero ($\mathbb{N}_0$).

$\mathbb{N}_0$ = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ...}

Conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$):

$\mathbb{Z}$ = {... ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ...}

Conjunto de números racionales ($\mathbb{Q}$):

Número racional es aquel que se puede expresar como cociente de dos números enteros con denominador distinto de cero. Se pueden expresar también como una fracción irreducible. Los números enteros también son racionales, ya que pueden ser expresados como una fracción de denominador igual a uno.

Son números racionales:

Los números enteros, las expresiones decimales exactas y las expresiones decimales periódicas.

## Conjunto de números irracionales

Todo número irracional es aquel que no es racional, es decir, no se puede transformar en un cociente de números enteros, son números cuyo desarrollo decimal es infinito y no es periódico, son números irracionales, por ejemplo:

$\pi = 3{,}141582654\ \ldots$

$e = 2{,}7182811828\ \ldots$

$\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Número de oro)

También son números irracionales las raíces no exactas de números enteros o racionales como por ejemplo:

$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{\dfrac{1}{3}}\,,\ \sqrt[3]{-26}\,,\ \sqrt[5]{\dfrac{7}{5}}$

La unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales determinan el conjunto de los números reales (R).

| POTENCIACIÓN DE NÚMEROS REALES | RADICACIÓN DE NÚMEROS REALES |
|---|---|
| n y m números enteros | $n \wedge c \in N,\ m \in Z$ |
| **PROPIEDADES** | **PROPIEDADES** |
| 1) $a^0 = 1$ | 1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Siempre que todas las raíces existan. |
| 2) $a^1 = a$ | 2) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ Siempre que todas las raíces existan. |
| 3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ | 3) $\sqrt[n]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[n \cdot c]{a}$ Siempre que todas las raíces existan. |
| 4) $(a\ .\ b)^n = a^n\ .\ b^n$ | 4) $\sqrt[n]{a^n} = a$ Si n es impar. |
| 5) $(a : b)^n = a^n : b^n$ | 5) $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ Si n es par. |
| 6) $a^m\ .\ a^n = a^{m+n}$ | 6) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ |
| 7) $a^m : a^n = a^{m-n}$ | |
| 8) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ | |
| 9) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $n>0$ | |

- Ejemplos:

1) $3^7 = 3^2 \cdot 3^5$

2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} . \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

3) $\left((-2)^3\right)^2 = (-2)^6 = 64$

4) $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

5) $\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27} = -2 \cdot 3 = -6$

6) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8 : 2} = \sqrt{4} = 2$

7) $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

8) $\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

# Radicales

Un radical es un símbolo matemático usado para representar la raíz de un número. En algunos casos, representa a un número irracional, como por ejemplo:

$$\sqrt{3};\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}};\ \sqrt[4]{7};\ \sqrt[5]{91}$$

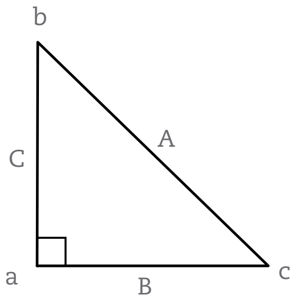
En otros casos no representa números irracionales, como por ejemplo:

$$\sqrt{36}\ ,\ \sqrt[5]{-32}\ ,\ \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$$

# Representación en la recta numérica de números irracionales

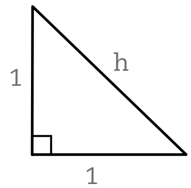
## Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



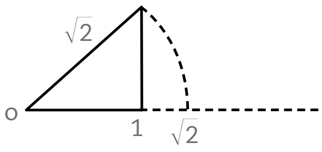

$$\overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{ab}^2$$
$$A^2 = B^2 + C^2$$

Representar $\sqrt{2}$:
Se toma un triángulo rectángulo cuyos catetos son una unidad.



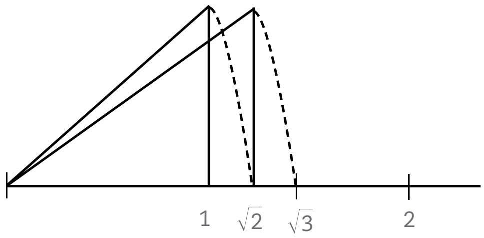

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$
$$h^2 = 2$$
$$h = \sqrt{2}$$

Ahora se ubica en la recta numérica.

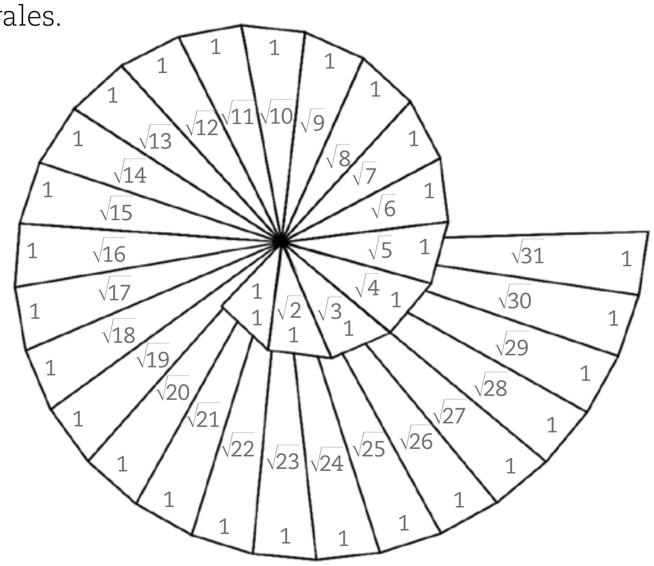


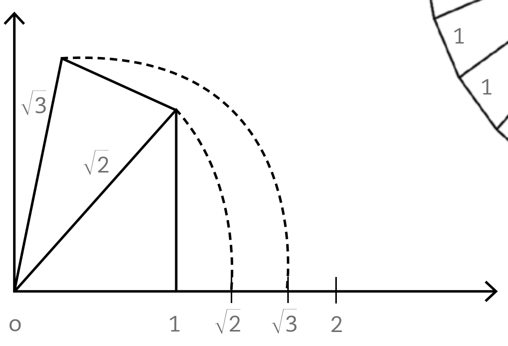

Para $\sqrt{3}$: $\sqrt{3^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$

Se dibuja un triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{2}$.




Este espiral se forma con la representación de triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son las raíces cuadradas de los números naturales.




## Simplificación de radicales

### Mínima expresión de un radical

En muchos casos, la expresión de un radical puede ser simplificada transformándola en otra de mínima expresión. Para simplificar se utilizan las propiedades vistas y la factorización de números.

- Ejemplos:

1) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

2) $\sqrt{242} = \sqrt{11^2 \cdot 2}$

$= \sqrt{11^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{2}$

$= 11 \cdot \sqrt{2}$ Simplificado.

| | |
|---|---|
| 242 | 2 |
| 121 | 11 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

3) $\sqrt{128} = \sqrt{2^7}$

$\rightarrow \sqrt{2^6 \cdot 2} = \sqrt{2^{\cancel{6}\,3}} \cdot \sqrt{2}$

$= 8\sqrt{2}$

$\rightarrow \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{2^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{2^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{2} =$

$= 8\sqrt{2}$

| | |
|---|---|
| 128 | 2 |
| 64 | 2 |
| 32 | 2 |
| 16 | 2 |
| 8 | 2 |
| 4 | 2 |
| 2 | 2 |
| 1 | |

Factoreamos el número 128 = $2^7$ para escribirlo en forma de potencia.

$$\sqrt{128} = \sqrt{2^7}$$

Se escribe como el producto de potencias de igual base, siendo un exponente igual o múltiplo del índice y el otro exponente lo que falta para llegar al exponente dado.

4) $\sqrt[4]{81x^4y^8} = \sqrt[4]{3^4 \cdot x^4 \cdot y^8} = \sqrt[\cancel{4}]{3^{\cancel{4}}} \cdot \sqrt[\cancel{4}]{x^{\cancel{4}}} \cdot \sqrt[\cancel{4}]{y^{\cancel{8}\,2}} = 3 \cdot |x| \cdot y^2$

## Adición y sustracción de radicales

a) *Radicales semejantes:*
Cuando los radicales son semejantes se suman y se restan sus coeficientes.

$4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (4 + 5)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$5\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = (5 - 9)\sqrt{6} = -4\sqrt{6}$

b) Cuando los radicales no son semejantes hay que simplificarlos cuando sea posible.

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{5^2}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b} = (5 - b)\sqrt{b}$

$3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2^{\cancel{2}}}\sqrt{2} - 4\sqrt{3^{\cancel{2}}}\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + \sqrt{2} = -5\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{5} = \\ 4 + 2\sqrt{7} = \end{array}\right\}$ Como no son términos semejantes quedan así expresados.

## Multiplicación y división de radicales

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

Siempre que todas las expresiones existan.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} = 2$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{5}{16}} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{16} : 2} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2^5}} = \dfrac{1}{2}$

c) $2\sqrt[3]{5} \cdot 3\sqrt[3]{5^2} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{5 \cdot 5^2} = 6 \cdot \sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}} = 30$

d) $\left(-\sqrt[7]{32}\right) . \left(\dfrac{1}{3}\sqrt[7]{24}\right) = -\dfrac{1}{3}\sqrt[7]{2^5} \cdot \sqrt[7]{2^3 \cdot 3} = -\dfrac{1}{3}\sqrt[7]{2^8 \cdot 3} = -\dfrac{1}{3}\sqrt[7]{2^7 \cdot 2 \cdot 3} =$

$-\dfrac{1}{3}\sqrt[\cancel{7}]{2^{\cancel{7}}} \cdot \sqrt{6} = -\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

e) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[5]{27} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3^{\frac{19}{15}}$

$\sqrt[15]{3^{19}} = \sqrt[15]{3^{15} \cdot 3^4} = \sqrt[\cancel{15}]{3^{\cancel{15}}} \cdot \sqrt[15]{3^4} = 3 \cdot \sqrt[15]{3^4}$

## Racionalización de denominadores

Racionalizar una fracción es encontrar una expresión equivalente que elimine las raíces del denominador.

*Primer caso:*
El denominador es un solo radical.

a) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}\,\sqrt[5]{x^2}} = \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[\cancel{5}]{x^{\cancel{5}}}} = \dfrac{2}{x}\sqrt[5]{x^2}$

Para racionalizar el radical del denominador se debe igualar el exponente del radicando con el índice de la raíz, para esto se debe multiplicar numerador y denominador por la siguiente expresión: $\sqrt[m]{x^{m-n}}$ . Previamente transformamos el radical en su mínima expresión.

b) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{32}} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{2^5}} = \dfrac{8}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}^{1}\ \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2^2}\,\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{8}}\sqrt[3]{2}}{\underset{1}{\cancel{4}}}$

*Segundo caso:*
El denominador es un binomio de la forma.

$$\frac{p}{a \pm \sqrt{b}}$$

Para racionalizar en este caso se debe multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5^{\cancel{2}}}-\cancel{\sqrt{15}}+\cancel{\sqrt{15}}-\sqrt{3^{\cancel{2}}}} =$

$\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-3} = \dfrac{\cancel{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}$

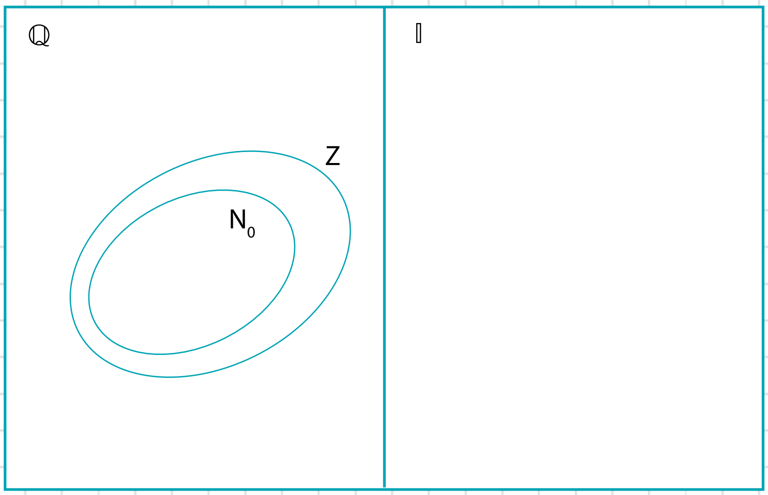
b) $\dfrac{2\sqrt{3}-2}{2-3\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3}-2\right)\left(2+3\sqrt{3}\right)}{\left(2-3\sqrt{3}\right)\left(2+3\sqrt{3}\right)} = \dfrac{4\sqrt{3}+6\sqrt{3^{\cancel{2}}}-4-6\sqrt{3}}{4+\cancel{6\sqrt{3}}-\cancel{6\sqrt{3}}-9\sqrt{3^{\cancel{2}}}} =$

$\dfrac{4\sqrt{3}+18-4-6\sqrt{3}}{4-27} = \dfrac{-2\sqrt{3}+14}{-27} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-27}+\dfrac{14}{-27} = \boxed{\dfrac{2}{27}\sqrt{3}-\dfrac{14}{27}}$

**1** Marcar con una cruz a qué conjunto pertenece cada uno de los siguientes números.

| | $0,\widehat{2}$ | 1,0222... | $\frac{1}{7}$ | 0 | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt[3]{-27}$ | $\sqrt{-9}$ | π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_0$ | | | | | | | | | |
| Z | | | | | | | | | |
| Q | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | |
| $\mathbb{R}$ | | | | | | | | | |

**2** Ubicar en el diagrama de conjuntos numéricos los siguientes números.




$a = \sqrt[3]{8}$ $\quad g = \sqrt{2}$ $\quad m = \sqrt{-1}$

$b = \sqrt[3]{-8}$ $\quad h = \sqrt{\dfrac{4}{100}}$ $\quad n = 1,\widehat{2}$

$c = \dfrac{7}{5}$ $\quad i = -3$ $\quad o = -\dfrac{15}{3}$

$d = \pi$ $\quad j = \dfrac{10}{5}$ $\quad p = 901$

$e = \sqrt{-2}$ $\quad k = 0,8$ $\quad q = \sqrt{3}$

$f = 0$ $\quad l = \sqrt[3]{122}$

**3** Resolver las siguientes ecuaciones y clasificar la solución en racional, irracional y no real.

**a)** $-\frac{1}{3}x^2 - 3 = -2$

**b)** $\frac{-2 - x^3}{5} = 5$

**c)** $3x^2 - \frac{1}{2} = 0$

**d)** $x^4 - \frac{1}{16} = 0$

**e)** $\left(\frac{3}{2} - 5x^2\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$

**f)** $-\frac{x^3}{7} + 1 = 17$

**g)** $\frac{4 - 2x^2}{-2} = 6$

**h)** $x^3 + 7 = -1$

**i)** $\left(2x^2 - \frac{5}{2}\right) : \frac{1}{2} = 3$

**j)** $(2x)^2 - 3 = 6$

**4** Resolver aplicando propiedades y clasificar el resultado.

**a)** $-3^2 =$

**b)** $(-3)^2 =$

**c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-3)^2 =$

**d)** $5^4 \cdot 5^{-2} =$

**e)** $10^7 : 10^3 =$

**f)** $\left(\frac{5}{3}\right)^0 \cdot 2^{-1} =$

**g)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

**h)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} =$

**i)** $\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} =$

**j)** $9^{-\frac{1}{2}} =$

**k)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

**l)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} =$

**m)** $3^{\frac{2}{3}} : 3^{-\frac{1}{3}} =$

**n)** $7^{\frac{5}{2}} : 7^{\frac{1}{2}} =$

**o)** $\sqrt[4]{2^2} =$

**p)** $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{-5} =$

**q)** $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

**r)** $\sqrt[8]{9^{+2}} =$

**5** Indicar = o ≠ según corresponda.

**a)** $\sqrt{64+36}$ ____ $\sqrt{64}+\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt[3]{8\cdot 27}$ ____ $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$ **c)** $\sqrt{(-4)(-25)}$ ____ $\sqrt{(-4)}\cdot\sqrt{(-25)}$

**6** Ubicar en la recta numérica los siguientes números irracionales e indicar entre qué números enteros se encuentra.

**a)** $\sqrt{7}=$

**b)** $-\sqrt{6}=$

**c)** $\sqrt{15}=$

**d)** $-\sqrt{5}=$

**e)** $\sqrt{3}+1=$

**f)** $\sqrt{7}-3=$

**g)** $-\sqrt{5}-2=$

**h)** $\sqrt{6}+1=$

**7** Simplificar los siguientes radicales.

**a)** $\sqrt{625}=$

**b)** $-\sqrt{256}=$

**c)** $\sqrt[3]{-64x^3}=$

**d)** $\sqrt{196}=$

**e)** $\sqrt[-3]{-10000}=$

**f)** $\sqrt{24}=$

**g)** $\sqrt{20}=$

**h)** $\sqrt{180x^4}=$

**i)** $\sqrt{175y^6}=$

**j)** $\sqrt[3]{40y^3}=$

**k)** $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

**l)** $16^{\frac{2}{3}}=$

**m)** $(-81)^{\frac{1}{3}}=$

**n)** $54^{\frac{1}{3}}=$

**o)** $\left(\frac{1}{162}\right)^{-\frac{1}{4}}=$

**p)** $\left[(128)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=$

**q)** $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{4}}=$

**8** Aplicar propiedades y simplificar cuando sea posible.

**a)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$

**b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} =$

**c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} =$

**d)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} =$

**e)** $\sqrt{18} \cdot \sqrt{14} =$

**f)** $\sqrt{45} \cdot \sqrt{60} =$

**g)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18} =$

**h)** $\sqrt{2x^3y} \cdot \sqrt{12xy} =$

**i)** $\sqrt{28y} : \sqrt{4y} =$

**j)** $\sqrt{21a} : \sqrt{3a} =$

**k)** $\dfrac{\sqrt{72xy}}{2\sqrt{2}} =$

**l)** $\dfrac{\sqrt{75ab}}{3\sqrt{3}} =$

**9** Resolver las siguientes operaciones.

**a)** $6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$

**b)** $8\sqrt{5} + 9\sqrt{5} =$

**c)** $9\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} =$

**d)** $14\sqrt[5]{2} - 6\sqrt[5]{2} =$

**e)** $4\sqrt[3]{y} + 9\sqrt[3]{y} =$

**f)** $6\sqrt[4]{t} - 3\sqrt[4]{t} =$

**g)** $4\sqrt[3]{5} - 3 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt{3} =$

**h)** $5\sqrt{7} - 8\sqrt[4]{11} + \sqrt{7} + 9\sqrt[4]{11} =$

**i)** $6\sqrt{2} + 11\sqrt{2} =$

**j)** $2\sqrt{12} + 5\sqrt{3} =$

**k)** $8\sqrt{27} - 3\sqrt{3} =$

**l)** $9\sqrt{50} - 4\sqrt{2} =$

m) $18\sqrt{72}+2\sqrt{98}=$

n) $12\sqrt{45}-8\sqrt{80}=$

o) $5\sqrt[5]{32}-2\sqrt[3]{108}=$

p) $9\sqrt[3]{40}-7\sqrt[3]{135}=$

q) $\frac{4}{3}\sqrt[6]{8}-\frac{1}{5}\sqrt[8]{16}+\frac{1}{2}\sqrt{8}=$

r) $\frac{1}{4}\sqrt{150}-2\sqrt{54}-\frac{3}{2}\sqrt{2400}=$

s) $\sqrt[3]{20}+\sqrt[6]{36}-5\sqrt[3]{48}-\sqrt{45}=$

t) $\sqrt[6]{9}-4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{81}=$

u) $\sqrt[3]{32}+\sqrt[6]{16}+3\sqrt[3]{108}=$

v) $4^{\frac{1}{2}}-125^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=$

w) $2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{5}{2}}+2^{\frac{7}{2}}=$

x) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\frac{5}{9}\sqrt[3]{54}+\sqrt{2}=$

**10** Resolver las siguientes operaciones. Dar la solución a su mínima expresión.

a) $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{3}=$

b) $\sqrt[3]{121}:\sqrt[3]{11}=$

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=$

d) $\sqrt{\frac{9}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{6}=$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}=$

f) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}=$

g) $\frac{1}{5}\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=$

h) $\sqrt{12}:\left(2\sqrt{3}\right)=$

i) $-3\sqrt{10}\cdot2\sqrt{5}=$

j) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{2}=$

**k)** $6\sqrt[3]{100}\cdot 2\sqrt[3]{10}=$

**l)** $-7\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{4}\cdot 5\sqrt[6]{6}=$

**m)** $12\sqrt{200}:3\sqrt{2}=$

**n)** $\sqrt{6}\left(2-3\sqrt{6}\right)=$

**o)** $\sqrt{3}\left(4+\sqrt{3}\right)=$

**p)** $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=$

**q)** $\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{9}-4\sqrt[3]{21}\right)=$

**r)** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=$

**s)** $\left(\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}-2\sqrt{5}\right)=$

**t)** $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=$

**u)** $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=$

**v)** $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3=$

**w)** $\left(\sqrt{20}-\sqrt{30}\right):\left(-\sqrt{5}\right)=$

**x)** $\sqrt[3]{3^1}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{27}=$

**y)** $\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=$

**z)** $\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}=$

**11** Racionalizar.

**a)** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}=$

**b)** $\dfrac{10}{\sqrt[3]{25}}=$

**c)** $7^{-\frac{1}{3}}=$

**d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=$

**e)** $\dfrac{-4}{\sqrt{98}}=$

**f)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}=$

**g)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=$

**h)** $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}}=$

**i)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{12}}=$

**j)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} =$

**k)** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} =$

**l)** $\dfrac{2}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

**m)** $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

**n)** $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{6}} =$

**o)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} =$

**p)** $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} =$

**q)** $\dfrac{3\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} =$

**r)** $\dfrac{\sqrt{2}}{5\sqrt{6}-\sqrt{3}} =$

**12** Resolver las siguientes operaciones combinadas.

**a)** $\sqrt{\dfrac{18}{4}} + 2\sqrt{\dfrac{8}{9}} + \sqrt{32} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$

**b)** $4\sqrt{\dfrac{25}{112}} + \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{81}{28}} - 2\sqrt{\dfrac{36}{175}} + 4\sqrt{\dfrac{4}{63}} =$

**c)** $\dfrac{1}{3}\sqrt{150} - \dfrac{1}{2}\sqrt{54} + \dfrac{1}{2}\sqrt{96} - 2\sqrt{24} =$

**d)** $\sqrt{24} - \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 =$

**e)** $\dfrac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{15}} =$

**f)** $\sqrt{256} - 5\sqrt{16} + \sqrt[3]{32} =$

**g)** $\sqrt{27} + \sqrt{300} - 7\sqrt{75} + \dfrac{1}{3}\sqrt{48} =$

**h)** $\left(\dfrac{\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt[4]{16}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$

**i)** $\left(\sqrt{8}\cdot\sqrt[5]{2^2}\right)^{\frac{3}{4}} =$

**j)** $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} + \sqrt[2]{64} =$

**k)** $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} =$

**l)** $\left(3\sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{7} - \left(2\sqrt[3]{4}\right)^3 =$

**m)** $\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{2} + \left(5-3\sqrt{2}\right)^2 =$

**n)** $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - 4\sqrt{20} + \sqrt{15}\cdot 7\sqrt{3} =$

**o)** $-18\sqrt[3]{24} : 2\sqrt[3]{3} + \dfrac{6}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{24}\right) =$

**p)** $-5\sqrt[6]{8} + 9^{\frac{1}{4}} + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{12\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) =$

**q)** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} =$

**r)** $\left(\dfrac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^2 =$

**13** Calcular x en las siguientes ecuaciones.

**a)** $\sqrt{5}\,x - 12 = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$

**b)** $\sqrt{27}\,x + \sqrt{12}\,x - \sqrt{3}\,x = 4\sqrt{3}$

**c)** $3\sqrt{2}\,x + 4\sqrt{8} = x - 2\sqrt{2}$

**d)** $3\sqrt{2}\,x - x = -2\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$

**e)** $\dfrac{\sqrt{125x-1}}{\sqrt{5}+2} = x - \sqrt{5}$

**f)** $\dfrac{2x - 3\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}} = -2\sqrt{7}$

**g)** $-\left(\sqrt{5}\right)^{-1} x^2 + \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 0$

**h)** $\dfrac{2x}{2\sqrt{3}-1} - 3\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\sqrt{27}$

**i)** $\dfrac{2x\sqrt{2} - 3x}{\sqrt{2}-1} = -\sqrt{8}$

**j)** $\dfrac{-\sqrt{18} - 2x}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{2}-2x}$

**k)** $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{2x}-1\right) = x^2 + \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

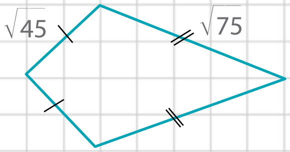
**14** Resolver.

**a)** El perímetro de un rectángulo es $15\sqrt{2}$ cm y la altura es $\sqrt{8}$ cm. ¿Cuánto mide la base?

**b)** El perímetro de un cuadrado es $\sqrt{125}$ cm. Calcular la medida del lado y la diagonal del cuadrado.

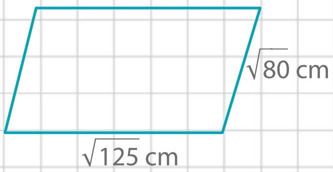
**c)** El perímetro de un rombo es igual a $\sqrt{1296}$ ¿Cuánto mide cada lado?

**d)** Hallar el perímetro del romboide.




**e)** Hallar la longitud de la circunferencia sabiendo que el diámetro es de $\sqrt{12}$ cm.

**f)** Hallar el perímetro del paralelogramo sabiendo:




**g)** Los lados de un rectángulo miden $\sqrt{18}$ cm y $\left(1+\sqrt{32}\right)$ cm. Calcular el perímetro, el área y la diagonal.

**h)** La base de un rectángulo mide $\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm y su superficie es $\left(2+3\sqrt{3}\right)$ cm$^2$. Calcular el perímetro del rectángulo.

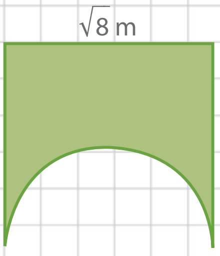
**i)** El área de un trapecio rectángulo es igual a 30. Sabiendo que la base menor mide $\sqrt{5}$ y la mayor $\sqrt{20}$, calcular el valor exacto del perímetro del trapecio.

**j)** El perímetro de un rombo es $\sqrt{108} + \sqrt{12}$ y la medida de una de las diagonales $\sqrt{75} - \sqrt{27}$. Calcular el área.

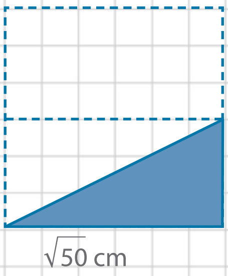
**k)** En un trapecio rectángulo, una de las bases mide $\sqrt{3}$ cm, la otra mide $\sqrt{27}$ cm y su altura $\sqrt{5}$ cm. Calcular en forma exacta la superficie y el perímetro del trapecio.

**15** Calcular la superficie sombreada. Expresar el resultado en forma exacta.

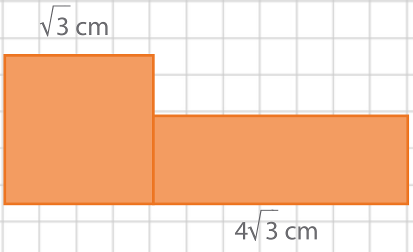
**a)**



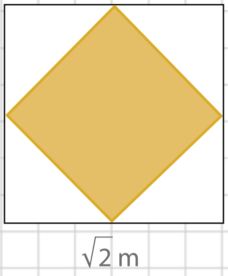

**c)**



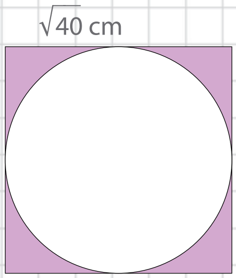

**b)**



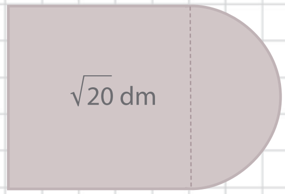

**d)**



**e)**

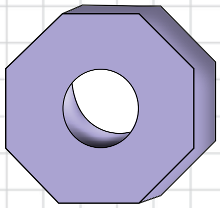



**f)**

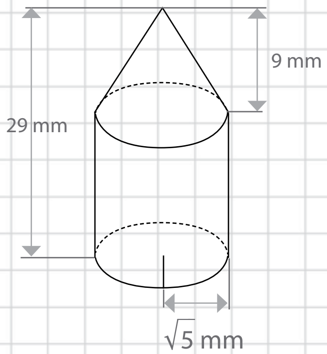



**16** Calcular el volumen de los siguientes cuerpos. Dar el resultado en forma exacta.

**a)** R = $\sqrt{10}$ cm
Lado octógono = $\sqrt{24}$ cm
Apotema = $\sqrt{29}$ cm
Profundidad = 4 cm



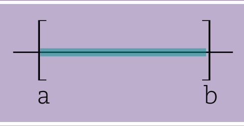
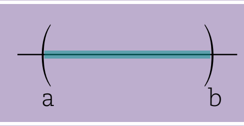
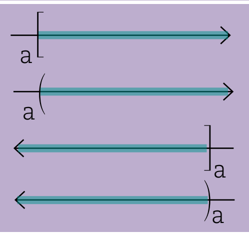
**b)**




**17** Hallar la cantidad de pintura que se necesita para cubrir un tanque cilíndrico de $3\sqrt{3}$ m de altura y radio de la base igual a 0,4 m, si un litro de pintura alcanza para cubrir 25 m². Dar el resultado en forma exacta.

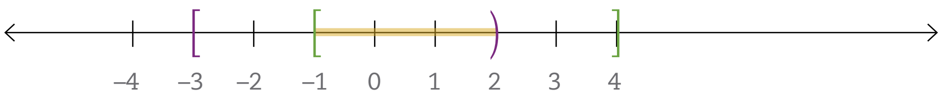
## Intervalos de números reales

El intervalo es un subconjunto de números reales que cumplen una condición. Se pueden expresar de las siguientes formas:

| NOTACIÓN CONJUNTISTA | NOTACIÓN DE INTERVALOS | GRÁFICAMENTE |
|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \,/ a \leq x \leq b\}$<br>Intervalo cerrado: Los extremos pertenecen. | $[a; b]$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$<br>Intervalo abierto: No pertenecen los extremos | $(a; b)$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$<br>$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$<br>Intervalos semiabiertos o intervalos semicerrados a izquierda o a derecha. | $[a; b)$<br>$(a; b]$ | <br> |
| $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$<br>$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$<br>$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$<br>$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$<br>Intervalos de extremo abierto o cerrado y extremo infinito. | $[a; +\infty)$<br>$(a; +\infty)$<br>$(-\infty; a]$<br>$(-\infty; a)$ |  |

## Operaciones con intervalos

a) Intersección de intervalos.
   Sean los intervalos: $A = [-3; 2)$   $B = [-1; 4]$




La intersección está formada por todos los números reales que pertenecen al intervalo A y al intervalo B (Elementos comunes a ambos intervalos).

$$\boxed{A \cap B = [-1; 2)}$$

Si la intersección de intervalos es no vacía, entonces, la intersección de intervalos es siempre un intervalo.

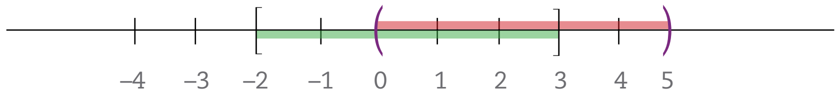
b) La unión de intervalos está formada por todos los números reales que pertenecen al intervalo A o al intervalo B (Elementos comunes y no comunes de los dos intervalos).

$$\boxed{A \cup B = [-3; 4]}$$

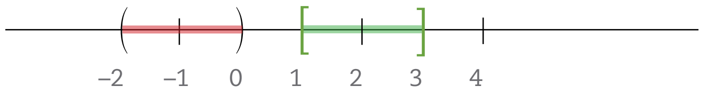
La unión de intervalos no es siempre un intervalo.

- Ejemplos:

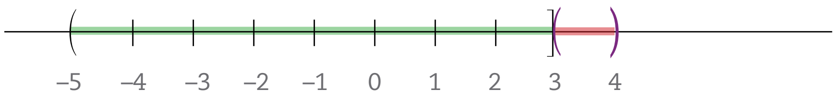
1) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 5\}$ $\quad B = [-2; 3]$
   $A \cap B = (0; 3]$
   $A \cup B = [-2; 5)$



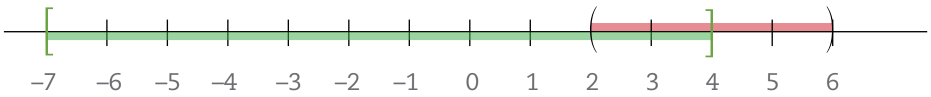

2) $A = (-2; 0)$ $\quad B = [1; 3]$
   $A \cap B = \emptyset$
   $A \cup B = (-2; 0) \cup [1; 3]$




3) $A = (-5; 3]$ $\quad B = (+3; 4)$
   $A \cap B = \emptyset$
   $A \cup B = (-5; 4)$




4) $A = [-7; 4]$ $\quad B = (2; 6)$
   $A \cap B = (2; 4]$
   $A \cup B = [-7; 6)$




**18** Completar el siguiente cuadro.

| **Conjunto** | **Intervalo** | **Gráfico** |
|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$ | | |
| | $(-5; -2]$ | |
| | |   |
| | $(-\infty; 3]$ | |
| $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 \leq x < 7\}$ | | |
| $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x \leq 1\}$ | | |

**19** Indicar el resultado de la operación sabiendo que:

$A = \left(\frac{1}{4}; 2\right)$ $B = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$ $C = [-5; -1]$

**a)** $A \cup B =$

**b)** $B \cup C =$

**c)** $A \cap B =$

**d)** $B \cap C =$

**e)** $A \cup C =$

**f)** $A \cap C =$

**g)** $(A \cup B) \cap C =$

**h)** $(A \cap B) \cup C =$

**20** Resolver las siguientes inecuaciones. Expresar el resultado como intervalo en dos formas distintas.

**a)** $x \geq -2$

**b)** $y \geq 1$

**c)** $x \leq 5$

**d)** $x < 0$

**e)** $y < 1$

**f)** $2x - 6 < 0$

**g)** $-3x + 9 \geq 0$

**m)** $-3 < 5x < 8$

**h)** $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$

**n)** $\frac{1}{2} < 3x + 4 < 6$

**i)** $x + 4 < 2x - 3$

**o)** $-6 < 2 \cdot (x - 3) < 8$

**j)** $4x + 3 \leq -2x + 9$

**p)** $\frac{3}{5} < \frac{-x - 5}{6} < 6$

**k)** $4 < x + 3 < 9$

**q)** $-15 < \frac{3 \cdot (x - 2)}{5} \leq 0$

**l)** $-2 < x - 3 < 7$

## Módulo de un número real

El módulo de un número real es la distancia que hay entre el punto que representa al número y el cero. Se denota $|x|$.

$|-5| = 5$ $\quad$ $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ $\quad$ $|-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

*Definición*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

*Propiedades*

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = |-x|$

3) $\sqrt{x^2} = |x|$

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$

6) $|ax + ay| = |a \cdot (x + y)| = |a| \cdot |x + y|$

## Ecuaciones con módulos

$$|x| = k \quad \begin{cases} x = -k \\ x = +k \end{cases}$$

**a)** $|x| = 5$

$x = 5 \qquad x = -5$

**b)** $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

**c)** $|x| = -3$ No tiene solución porque no existen distancias negativas.

**d)** $|\sqrt{2}\,x - \sqrt{8}| = |\sqrt{32}|$

$|\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$

$|\sqrt{2}\,(x - \sqrt{2})| = 4\sqrt{2}$

$|x - 2| = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$|x - 2| = 4$

$-(x - 2) = 4 \qquad +(x - 2) = 4$

$x - 2 = -4 \qquad x = 4 + 2$

$\boxed{x_1 = -2} \qquad \boxed{x_2 = 6}$

**e)** $x^2 - 6 = 30$

$x^2 = 30 + 6$

$x^2 = 36$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

$|x| = 6$

$x = 6 \qquad x = -6$

**21** Resolver las siguientes ecuaciones.

**a)** $|x+5|=7$

**b)** $|y+3|=\dfrac{3}{5}$

**c)** $|4-x|=5$

**d)** $|2w+4|=6$

**e)** $|4x+2|=9$

**f)** $|\sqrt{6}\,x+\sqrt{6}|=\sqrt{6}$

**g)** $|x+5|+2|x+5|-3=6$

**h)** $\left|\dfrac{2x-3}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{8}$

**i)** $\left|\dfrac{3x-2}{4}\right|-5=1$

**j)** $\left|\dfrac{2x+3}{2}\right|+1=4$

## Inecuaciones con módulos

$|x| \le k \Rightarrow \begin{cases} x \le k \\ \quad y \\ x \ge -k \end{cases}$ Se deben cumplir ambas condiciones, lo que equivale a la intersección.

$|x| \le k \Rightarrow -k \le x \le k$

◗ Ejemplos:

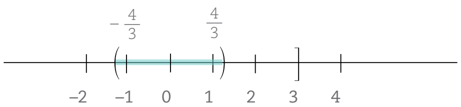
1) $|x| < \dfrac{4}{3}$

$-x < +\dfrac{4}{3}$

$\boxed{x > -\dfrac{4}{3}}$

$\boxed{x < \dfrac{4}{3}}$

$-\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{4}{3}$




Sol. $=\left(-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{4}{3}\right)$

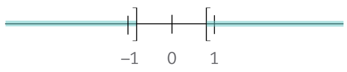
2) $|x| \ge k \Rightarrow \begin{cases} x \le -k \\ \quad o \\ x \ge k \end{cases}$ Se debe cumplir una de las condiciones o ambas, lo que equivale a la unión.

$$|x| \geq \frac{3}{4}$$

$$-x \geq \frac{3}{4} \qquad \boxed{x \geq \frac{3}{4}}$$

$$\boxed{x \leq -\frac{3}{4}}$$

$$\text{Sol.} = \left(-\infty \, ; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4} \, ; +\infty\right)$$




**22** Resolver las desigualdades con diferentes caminos.

**a)** $|x| > 3$

**b)** $|y| \geq 5$

**c)** $|z| \geq 2$

**d)** $|x + 4| > 5$

**e)** $|5 - x| \geq 3$

**f)** $|x + 5| > 9$

**g)** $|3x + 1| > 4$

**h)** $|4 - 3y| \geq 8$

**i)** $|5 + 2x| \geq 3$

**j)** $\left|\dfrac{6 + 2z}{3}\right| \leq 2$

**k)** $\left|\dfrac{5 - 3w}{4}\right| \geq 10$

**l)** $|2 - 3x| - 4 \geq -2$

**m)** $\left|3 \cdot \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right| > 5$

**n)** $\left|\dfrac{x}{2} + 4\right| \geq 5$

**o)** $\left|4 - \dfrac{3x}{5}\right| \geq 9$

**p)** $|2 - x| < -7$

**23** Indicar la respuesta correcta con V (Verdadero).

**a)** $Z^{n+1} \cdot Z^{n-1} =$

1) $Z^{n^2-1}$ ☐

2) $Z^{2n-1}$ ☐

3) $Z^{n^2-n}$ ☐

4) $Z^{2n}$ ☐

**b)** $Z^3 : Z^{-6} =$

1) $Z^{18}$ ☐

2) $Z^{-3}$ ☐

3) $Z^2$ ☐

4) $Z^9$ ☐

**c)** $5 \cdot (n^2 + 4)^0 =$

1) $5$ ☐

2) $5n^2$ ☐

3) $20n^2$ ☐

4) $5n^{20}$ ☐

**d)** La raíz cuadrada de $(-b^3)^0$ es =

1) $b^{-\frac{2}{3}}$ ☐

2) $+1$ ☐

3) $-b^{\frac{2}{3}}$ ☐

4) $-1$ ☐

5) $b^{-\frac{1}{3}}$ ☐

**e)** Simplificar $\sqrt{121} \cdot \sqrt[3]{-27} =$

1) $\sqrt[4]{(-27) \cdot 121}$ ☐

2) $11 \cdot \sqrt[3]{27}$ ☐

3) $-33$ ☐

4) $-99$ ☐

5) Ninguna ☐

**f)** $(6x)^2 \cdot (2x^2)^3 =$

1) $288x^3$ ☐

2) $72x^5$ ☐

3) $288x^8$ ☐

4) $72x^3$ ☐

**g)** $9^{\frac{3}{2}} =$

1) $2^{\frac{7}{2}}$ ☐

2) $27$ ☐

3) $81$ ☐

4) $9$ ☐

**h)** $\sqrt[3]{5a^2b} \cdot \sqrt[3]{50a^2 \cdot b^2} =$

1) $\sqrt[3]{5} \cdot a^2b$ ☐

2) $5ab\sqrt[3]{2a}$ ☐

3) $25ab\sqrt{2a}$ ☐

4) $5ab\sqrt[3]{2a}$ ☐

5) Ninguna ☐

**24** Indicar con la letra V la respuesta verdadera.

**a)** ¿Cuál de los siguientes números no es irracional?

1) $\sqrt[3]{16}$

2) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3) $\sqrt{5}$

4) $\sqrt[3]{27}$

**b)** ¿Cuál de los siguientes números es un número entero?

1) $\sqrt[3]{6}$

2) $\sqrt{7}$

3) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

4) $\sqrt{9}+1$

**c)** ¿Cuál de las siguientes raíces es igual a $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=$?

1) $\sqrt[6]{5}$

2) $\sqrt[3]{5}$

3) $\sqrt{6}$

4) $\sqrt[4]{3}$

**d)** ¿Cuál de los siguientes radicales está ya simplificado?

1) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

2) $\sqrt[3]{54}$

3) $\sqrt[3]{60}$

4) $\sqrt[4]{9}$

**e)** La forma más simple de $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ es :

1) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$

2) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$

3) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

4) $\frac{1}{8}\cdot\sqrt[3]{12}$

**f)** ¿Cuál de las siguientes raíces es igual a $3\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}$ ?

1) $6\sqrt[3]{3}$

2) $3\sqrt[3]{6}$

3) $3\sqrt[3]{9}$

4) $3\sqrt[6]{3}$

**g)** ¿Cuál de las siguientes raíces es igual a $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[3]{6}=$

1) $\sqrt[3]{15}$

2) $\sqrt{15}$

3) $\sqrt[15]{2}$

4) Ninguna de las anteriores

**h)** Cuál de las siguientes raíces es igual a $\left(\sqrt{54}+\sqrt{108}\right)\cdot\left(\sqrt{24}-\sqrt{48}\right)=$

1) $108\cdot 72\sqrt{2}$

2) $-36$

3) $-36+72\sqrt{2}$

4) $36-72\sqrt{2}$

# Fórmulas

| FIGURAS | PERÍMETROS | ÁREAS |
|---|---|---|
| Triángulos | $P = L_1 + L_2 + L_3$ | $A = \frac{b \cdot h}{2}$ |
| Trapecio | $P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ | $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ |
| Paralelogramo | $P = 2b + 2h$ | $A = b \cdot h$ |
| Rombo | $P = 4 \cdot L$ | $A = \frac{D \cdot d}{2}$ |
| Romboide | $P = 2L_1 + 2L_2$ | $A = \frac{D \cdot d}{2}$ |
| Cuadrado | $P = 4 \cdot L$ | $A = L^2 = \frac{D^2}{2}$ |
| Polígono regular | $P = N^o \cdot L$ | $A = \frac{P \cdot Ap}{2}$ |
| Circunferencia | $P = \pi \cdot D$<br>$P = 2\pi \cdot r$ | |
| Círculo | — | $A = \pi \cdot r^2$ |
| Sector circular | — | $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}^o}{360^o}$ |
| Corona circular | — | $A = \pi(R^2 - r^2)$ |
| Trapecio circular | — | $A = \frac{\pi \cdot \alpha^o (R^2 - r^2)}{360^o}$ |
| Segmento circular | — | $A = A \text{ sect circ} - A \triangle$<br>$A = A \text{ sect circ} + A \triangle$ |

## Cuerpos

| CUERPOS | ÁREA LATERAL | ÁREA TOTAL | VOLUMEN |
|---|---|---|---|
| Prisma | $A = P_B \cdot B$ | $A = A_{LAT} + A \cdot 2B$ | $V = A_B \cdot h$ |
| Cilindro | $A = 2\pi \cdot r\,h$ | $A = A_{LAT} + 2\pi r^2$ | $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ |
| Pirámide | $A = \dfrac{P_B + Ap}{2}$ | $A = \dfrac{P_B\,(Ap + ap)}{2}$ | $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3}$ |
| Cono | $A = \dfrac{P_B + g}{2} = \pi rg$ | $A = \pi \cdot r\,(g + r)$ | $V = \dfrac{\pi \cdot r^2\,h}{2}$ |
| Paralelepípedo<br>Cubo | $A = P_B \cdot h$ | $A = A_{LAT} + A \cdot 2B$ | $V = L \cdot A \cdot h$<br>$V = L^3$ |
| Esfera | —— | $A = 4\pi \cdot r^2$ | $A = \dfrac{4}{3}\,\pi \cdot r^3$ |